ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΠΡΟΤΑΣΗΣ 1)

f συνεχής στο x_0 και $f(x_0)>0 \Rightarrow (\exists \delta>0)(\forall x\in B(x_0,\delta)\cap A)$ $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow \exists$ κλειστό ορθογώνιο $S_0=\{x\in A: \|x-x_0\|_\infty < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}\}$ με $\inf(f/S_0) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0 \Rightarrow \forall P\in P(A)$ με $S_0\in S_P$:

$$0<\inf(f/S_0)\cdot v(S_0) \leq L(P,f) \leq L_f = \int_A f \quad , \inf f \geq 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 1)

Αφού f ολοκληρώσιμη, θα είναι και συνεχής σε κάθε $x\in A\setminus B$, με B σύνολο μη μηδενικού μέτρου και είναι το σύνολο των σημείων όπου η f ασυνεχής (Κρ. Lebesgue). Το B δεν μπορεί να είναι $=A$, γιατί τότε δεν θα είχε μηδενικό μέτρο (το $A\subset\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό ορθογώνιο και αυτά δεν έχουν μηδενικό n-διάστατο μέτρο)

ΠΡΟΤΑΣΗ 2:

Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f:A\to\mathbb{R}$ μη αρνητική και ολοκληρώσιμη. Τότε $f=0$ σχεδόν παντού $\Leftrightarrow \int_A f=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$) Έστω $B\subseteq A$ το σύνολο μηδενικού μέτρου και $f(x)=0$, $x\in A\setminus B$ και έστω $P\in P(A)$ και $S\in S_P$. Τότε $S\not\subset B$ (αφού τότε θα είχε μηδενικό μέτρο άτοπο ($\lightning$)), άρα $S\cap(A\setminus B)\neq\emptyset$ $\Rightarrow \inf(f/S)=0 \Rightarrow L(P,f)=0$, $\forall P\in P(A) \Rightarrow L_f=0=\int_A f$.

($\Leftarrow$) Έστω $\int_A f=0$, τότε από πρόταση (1) τα σημεία $\{x\in A: f(x)>0\}$ είναι στο σύνολο όπου η f είναι ασυνεχής, το οποίο έχει μέτρο 0, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \{x\in A: f(x)>0\}$ έχει άπειρο

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ο

Για $A \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό ορθογώνιο και $f, g : A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες τότε $f = g$ σχεδόν παντού $\Leftrightarrow \int_A |f-g| = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

f, g ολοκληρώσιμες $\Rightarrow f - g$ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$

$\Rightarrow |f-g|$ ολοκληρώσιμη

Επίσης $f = g$ σχεδόν παντού $\Leftrightarrow |f-g| = 0$ σχεδόν παντού

Άρα, αφού $|f-g|$ μη αρνητική $\underset{\text{Πρ.2}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow |f-g| = 0$ σχεδόν παντού $\Leftrightarrow \int_A |f-g| = 0$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ο

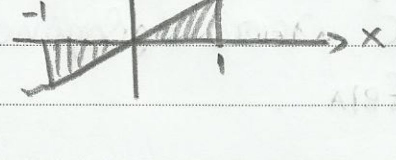
Για $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο με f, g ολοκληρώσιμες και $f = g$ σχεδόν παντού τότε $\int_A f = \int_A g$. ($\not\Leftarrow$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$) Έχουμε, από το προηγούμενο πόρισμα $\int_A |f-g| = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \Rightarrow \int_A f-g = \int_A f - \int_A g \leq 0 \\ \underline{\underline{\mu}} \\ \Rightarrow -\int_A f-g = -\int_A f + \int_A g \leq 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{διότι ισχύει} \\ \int_A f-g \leq \int_A |f-g| \end{array} \right)$$

($\not\Leftarrow$): Έστω αντιπαράδειγμα η $f(x,y) = x$ και $g(x,y) = 0$



$$\int_A x = \int_A 0 \quad , \text{ για } A = [-1,1] \times [-1,1]$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 4°:

Για $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο $f, g : A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $f = g$ στο $\mathring{A}$ (εσωτερικό του A) $\Rightarrow \int_A f = \int_A g$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού $f = g$ στο $\mathring{A}$, το $f \neq g$ το πολύ σε ένα υποσύνολο του ∂A. Όμως, το ∂A έχει μηδενικό μέτρο αφού είναι πεπερασμένη ένωση τμημάτων υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^n$, τα οποία έχουν μηδενικό (n-διάστατο) μέτρο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5:

Για $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $\{x \in A : f(x) \neq 0\} \subseteq \partial A \Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη με $\int_A f = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η f συνεχής σχεδόν παντού $\xrightarrow{\text{κρ. Lebesgue}}$ f ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$

$\underset{\substack{f=0 \\ \text{στο } A}}{\Rightarrow} \int_A f = \int_A 0 = 0.$

• Συναρτήσεις $f : B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ολοκληρώσιμες •

Ορισμός: Έστω $B \neq \emptyset$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Η $f : B \to \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη, αν η $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$f_B(x) := \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη πάνω σε ένα <u>οποιοδήποτε</u> κλειστό ορθογώνιο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με $B \subseteq A$. Τότε, το ολοκλήρωμα της $f_B|A : A \to \mathbb{R}$, ονομάζεται της $f : B \to \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\int_B f = \int_A f_B|A.$$

▸ Τώρα, το κύριο ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: Αν αντί για το $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο με $\subseteq$ επιλέξουμε $C \subseteq \mathbb{R}^n$ με $B \subseteq C$, με C κλειστό ορθογώνιο θα είναι ίδια το $\int_A f_B$ και $\int_C f_B|A$.

Αυτό ισχύει διότι:

$$\int_A f_B \overset{\circledast}{=} \int_{A \cap C} f_B + \underbrace{\cancel{\int_{S_1} f_B}}_{\to 0}$$

ή μπορούμε να πούμε ισοδύναμα:

$$\int_C f_B \overset{(*)}{=} \int_{A\cap C} f_B + \cancelto{0}{\sum_{i=2}^{6} \int_{S_i} f_B}$$

(*) προηγούμενη πρόταση

Άρα, $\int_A f_B = \int_C f_B$

Όλα αυτά φαίνονται και σχηματικώς: